Übungsblatt 4
Elementare-Funktionen

Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion:

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der folgenden Funktionen (a, b, c $\in \mathbb{R}$):

a) $f(x) = 3 - x, \quad g(x) = x^2 - 2,$

b) $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3, \quad g(x) = 3x^5 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 1, \quad h(x) = ax^5 - bx^4 + c,$

c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{2}{3}e^x, \quad h(x) = e^x - 4,$

d) $f(x) = a\,e^x, \quad g(x) = e^x + b,$

e) $f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = 2\,e^{-x} + 3,$

f) $f(x) = \sqrt{x-3}, \quad g(x) = 4\sqrt{x+2},$

g) $f(x) = \sqrt{x-2} + 2, \quad g(x) = \sqrt{x+a} - a,$

h) $f(x) = \sqrt{-x}, \quad g(x) = \sqrt{-x} + 1, \quad h(x) = a\sqrt{-x} + b$

Symmetrieverhalten von Funktionen

2. Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sin x + \sin^3 x, \quad g(x) = \sin x + x\cos x,$

b) $f(x) = \cos(\sin x), \quad D_1(f) = \mathbb{R}, \quad D_2(f) = [-\pi, \pi], \quad D_3(f) = [0, 2\pi],$

c) $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad g(x) = x^3 \cos x$

d) $f(x) = \sin x + \frac{x^3}{1+x^2}, \quad g(x) = \sin^2 x + \frac{x^2}{1+x^2}, \quad h(x) = x^4 + \frac{x}{1+\cos^2 x}$

e) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$

f) $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \quad h(x) = |x-2| - 3|x| + |x+2|$

Surjektivität, Injektivität und Bijektivität von Funktionen

3. Skizzieren Sie jeweils den Graphen der folgenden Funktionen, und entscheiden Sie, ob sie injektiv, surjektiv, bzw. bijektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad f_1(x) = 3x - 2$

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; \qquad f_2(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Elementare Funktionen

4.

a) Bestimmen Sie ein Polynom 2. Grades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$f(-2) = 9; \;\; f(-1) = 12; \; f(2) = 15;$$

b) Stellen Sie fest, ob das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ dessen Graph durch die Punkte *(0;5), (1;0), (2; -3)* verläuft, den Wert 21 bzw. -10 als Funktionswert annimmt.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Argumente.

5. Welche Scheitelpunkte haben die Parabeln? Skizzieren Sie die Graphen.
a) $y = -2x^2 - 4x + 1$ b) $y = x^2 - 4x + 3$

6. Geben Sie den Definitionsbereich D_f und, soweit vorhanden, hebbare Definitionslücken, Nullstellen, Polstellen und das Verhalten für $x \to \pm\infty$ (Asymptote) an. Skizzieren Sie den Graphen von *f*.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 4}$$

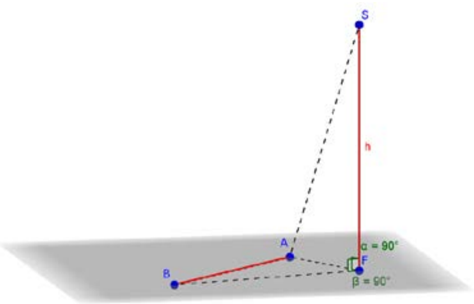
7. Eine Bakterienkultur besteht zur Zeit t[h] aus $B(t) = 500\,e^{1.386t}$ Bakterien.
Geben Sie an, in welcher Zeit sich die Bakterienzahl verdoppelt.
Um welchen Faktor vergrößert sich die Bakterienzahl innerhalb von 12 Stunden?

8.

Zeigen Sie: $Sin\,3x = (3 - 4\,Sin^2 x)\,Sin\,x$

Tip: $\boxed{\begin{array}{l} Sin\,2x = 2 Sin\,x\;Cos\,x \\ Cos\,2x = Cos^2 x - Sin^2 x \end{array}}$

9. Die Bergspitze *S* liegt *h* Meter über Grund. *AB* sei 120m, Winkel $\angle BAF$=48°, Winkel $\angle FBA$=76°, Winkel $\angle FAS$=71°. Berechnen Sie *h*.



Lösungen – Übungsblatt 4:

1.

a) $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$; $D(g) = \mathbb{R}$, $W(g) = [-2, \infty)$,

b) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = [3, \infty)$; $D(g) = W(g) = \mathbb{R}$; $D(h) = W(h) = \mathbb{R}$,

c) $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}$, $W(f) = D(g) = (0, \infty)$, $W(h) = (-4, \infty)$,

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $W(f) = (0, \infty)$ falls $a > 0$, $W(f) = (-\infty, 0)$ falls $a < 0$,
$D(g) = \mathbb{R}$; $W(h) = (b, \infty)$,

e) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = (0, \infty)$; $D(g) = \mathbb{R}$, $W(g) = (3, \infty)$,

f) $D(f) = [3, \infty)$, $W(f) = [0, \infty)$; $D(g) = [-2, \infty)$, $W(g) = [0, \infty)$,

g) $D(f) = W(f) = [2, \infty)$; $D(g) = W(g) = [-a, \infty)$,

h) $D(f) = (-\infty, 0]$, $W(f) = [0, \infty)$; $D(g) = (-\infty, 0]$, $W(g) = [1, \infty)$;
$D(h) = (-\infty, 0]$, $W(h) = [b, \infty)$,

2.

a) $f(x)$ und $g(x)$ sind ungerade Funktionen.

b) $f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$.
$f(x)$ ist gerade Funktion in den Intervallen D_1 und D_2.

c) $f(x)$ und $g(x)$ sind ungerade Funktionen.

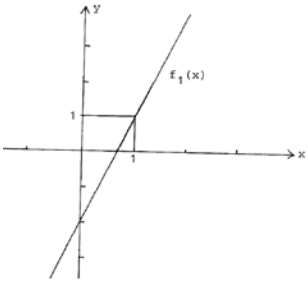
d) $f(x)$ ist ungerade Funktion, $g(x)$ ist gerade Funktion, $h(x)$ besitzt keine Symmetrie.

e) $g(x)$ ist gerade Funktion im Definitionsbereich $[-2, 2]$.

f) $f(x)$ und $h(x)$ sind gerade Funktionen:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{1+(-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = f(x) \\
g(-x) &= \frac{(-x)-1}{|(-x)-1|} = \frac{-(x+1)}{|-(x+1)|} = -\frac{x+1}{|x+1|}, \quad g(-x) \neq g(x), \quad g(-x) \neq -g(x) \\
h(-x) &= |(-x)-2| - 3|-x| + |(-x)+2| = |-(x+2)| - 3|x| + |-(x-2)| \\
&= |x-2| - 3|x| + |x+2| = h(x)
\end{aligned}$$

3.



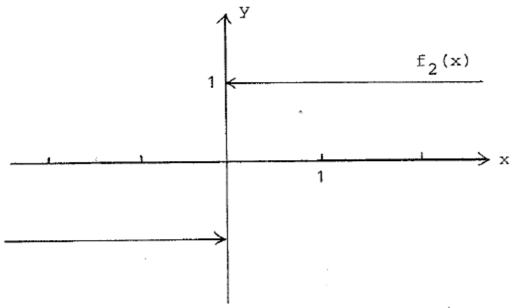
a)

f_1 ist injektiv, denn aus $3x_1 - 2 = f_1(x_1) = f_1(x_2) = 3x_2 - 2$ folgt $x_1 = x_2$.

f_1 ist auch surjektiv, denn für $y \in \mathbb{R}$ ist $f_1\left(\frac{1}{3}(y+2)\right) = y$.

Also ist f bijektiv.

$f_2 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_2(x) := \frac{x}{|x|}$.

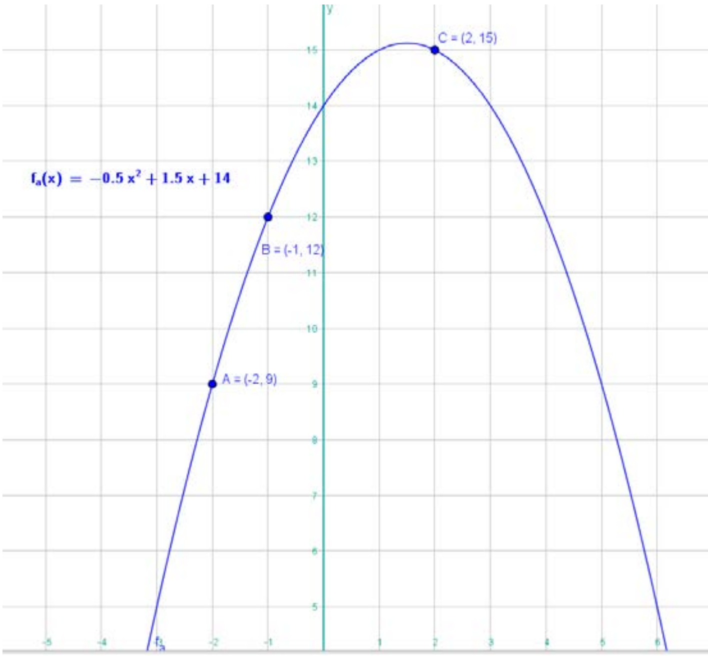


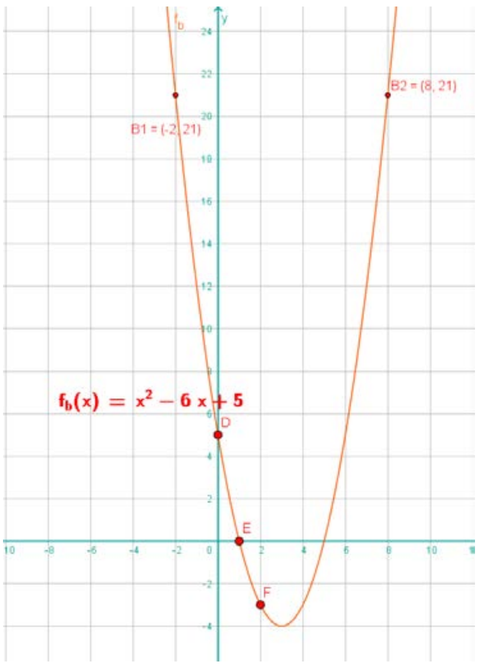
b)

f_2 ist weder injektiv (da z.B. $f(1) = f(2)$) noch surjektiv (weil z.B. $3 \notin f_2(\mathbb{R} - \{0\})$ gilt), also auch nicht bijektiv.

4.

a) $f(x) = -0.5x^2 + 1.5x + 14$;



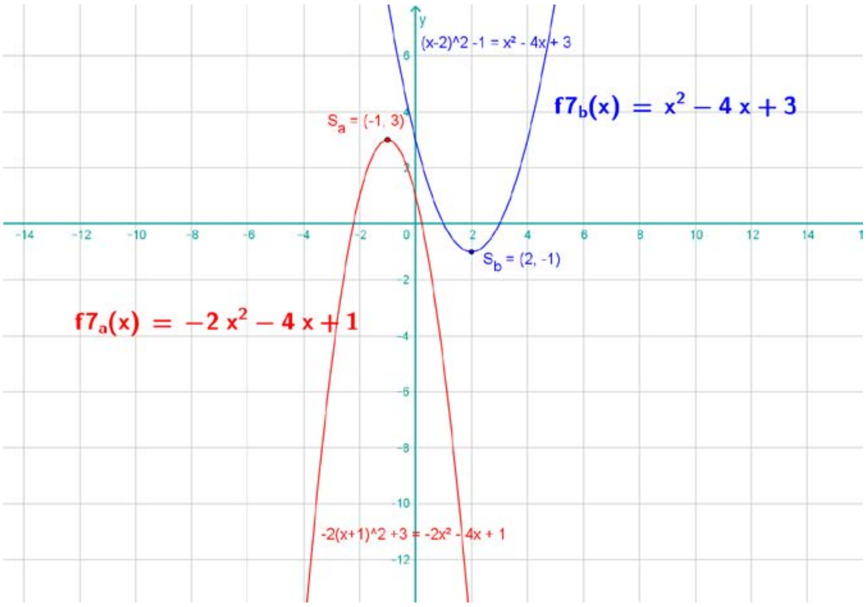


b)

f(8)=f(-2)=21; der Funktionswert wird also angenommen
aber f(x)=-10 hat keine reelle Lösung

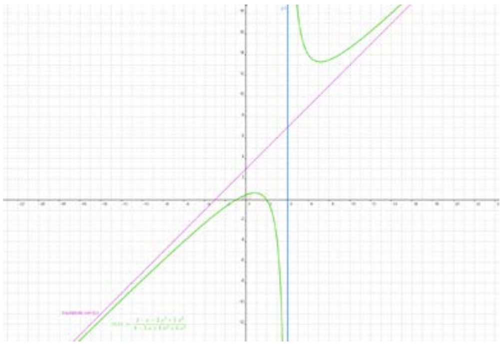
5.

a) $-2(x+1)^2+3$ b) $(x-2)^2-1$



6.

$D=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$, $x_H=1$, $x_P=4$, $x_{N1}=2$, $x_{N2}=-1$, $g(x)=x+3$



7. a) $t_{Doppelt}=0.5h$ b) $1.672\cdot 10^7$

8. $Sin\,3x=(3-4\,Sin^2x)\,Sin\,x$

9. h=408 m